ANÁLISIS DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE UN ERROR ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES Y PROFESORES

Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann
Universidad Panamericana Campus Guadalajara México
ceccius@up.edu.mx

Campo de investigación: Pensamiento algebraico, Formación de profesores
Nivel: Medio

Resumen. - *La investigación tiene dos fases:*

1) *Se plantea a los estudiantes de primer ingreso a la Universidad Panamericana, Guadalajara, México la simplificación de la expresión algebraica* $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$ *; analizándose las respuestas equivocadas con su posible origen.*
2) *Se hace un estudio con 7 profesores de educación media básica y media superior, en el cual, se les presenta la simplificación errónea (a la izq.) con la consigna de mencionar el origen del error y cómo le ayudarían al alumno.* $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = z^3$

Alumnos cometen errores de muy diverso origen, y los profesores encuestados no siempre analizan a profundidad el origen del error cometido por este alumno.

Palabras clave: errores algebraicos, formación de profesores

Introducción

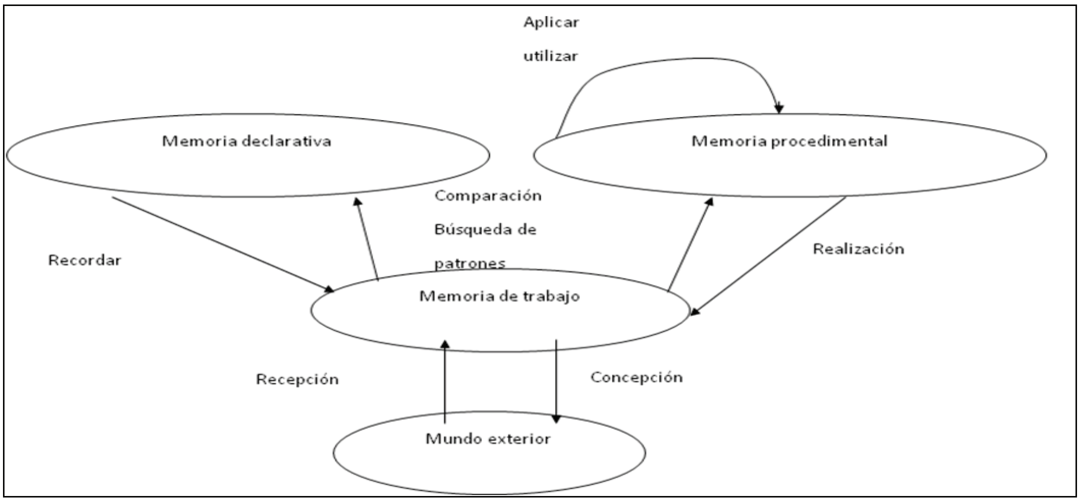
En el contexto de un examen de ubicación de matemáticas de 276 alumnos de primer ingreso a las carreras Empresariales de la Universidad Panamericana (campus Guadalajara), se plantea la simplificación de la expresión algebraica: $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$.

De los alumnos se esperan dos tipos de simplificación, que en ambos casos implican la aplicación de leyes de exponentes.

$$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}} = z^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = z^{\frac{3}{3}} = z \quad ; \quad \frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = \sqrt[3]{\frac{z^4}{z}} = \sqrt[3]{z^3} = z$$

Al reconocer, que sólo un 9% de los alumnos simplificó correctamente la expresión algebraica, se vio la necesidad de profundizar en varios aspectos, con la intención de acercarse a una forma adecuada de ayuda a los alumnos con error: Entender el fenómeno desde adentro, desde la posición del estudiante: por lo cual se analizan procedimientos realizados por los alumnos en busca de las diferentes simplificaciones con error. ¿En qué lugar de la memoria se generan los errores? ¿Cuáles son los errores más comunes y cuál es el origen de ellos?

A modo de dar una pequeña explicación simplificada, se interpreta el modelo respecto al ejercicio a simplificar: En primera instancia, un alumno debe percibir del mundo exterior el ejercicio que se le presenta. En la percepción se pueden originar errores, cuando el alumno no percibe el ejercicio con todo detalle. En el ejercicio en cuestión, un error posible sería la percepción del índice del radical (por su posición elevada) como exponente, lo cual llevaría a la aplicación de leyes de exponentes y radicales equivocadas. La memoria de trabajo se encarga de buscar en la memoria declarativa y la memoria procedimental patrones conocidos, ejercicios similares antes resueltos, un algoritmo o recordar alguna regla (en este caso probablemente de exponentes o eventualmente de manejo de fracciones) en la que tiene que establecer comparaciones de lo conocido con el ejercicio nuevo planteado. Al sacar información de la memoria declarativa, podría generarse, por ejemplo, el error de confusión con respecto a un exponente fraccionario, o sea, confundir el numerador con el denominador de dicho exponente fraccionario. Al aplicar las reglas de los exponentes, se puede incurrir en un error de la memoria declarativa. Las leyes de exponentes debieron haberse guardado con características generales y específicas, es decir con todo detalle. Un error posible sería entonces la aplicación de una regla equivocada. Otro error posible se genera en la memoria procedimental cuando un procedimiento se aplica "automáticamente", por ejemplo los esquemas de "tachado", a los que se hará alusión posteriormente.



Modelo de la memoria de Anderson (1984 en Nolte, 1991)

En la literatura se han clasificado errores como errores en la percepción de la información y en el manejo de la información (Radatz, 1985), lo cual para la investigación no es suficiente y con más detalle se comentan por Nolte (1991), Malle (1993) y Tietze (2000), quienes los analizan en virtud de encontrar el posible origen del mismo. Malle (1993) hace alusión a esquemas de "tachado" como aplicación de esquemas inadecuados que pueden ser útiles en ciertos casos, pero que no lo son en otros. Los errores por esquemas de "tachado" pueden estar relacionados con ejemplos muestra como: $\frac{a \cdot b}{a} = b$ en el cual se "tacha" literalmente la "a" del numerador con la "a" del denominador. Cabe mencionar que el esquema de "tachado" que utilizan los alumnos en el ejercicio de simplificación no se ha encontrado mencionado en la literatura, ya que los alumnos "tachan" signos de operación, o sea, los signos radicales con sus índices. Otros errores están relacionados con la aplicación de leyes de exponentes y radicales, en la confusión de leyes (intercambiar numerador y denominador en exponentes fraccionarios), y muchas veces, por no tener la metacognición suficiente, o por "guardar" leyes sin sus correspondientes características específicas (por ejemplo: $A^n \cdot A^m \neq A^{m \cdot n}$) ((Nolte, 1991); (Malle, 1993); y (Tietze, 2000)).

Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: ¿Muestran los profesores de matemáticas encuestados las competencias requeridas para un buen entendimiento/análisis del error cometido por el alumno? ¿Cuál es la estrategia de los profesores encuestados para ayudar al alumno?

Dentro de las competencias de un profesor se menciona la capacidad de analizar las respuestas erróneas de los alumnos en el sentido de encontrar las posibles causas u orígenes de los errores, para poder dar una "terapia" adecuada al alumno (Helmke, 2005). La calidad del proceso enseñanza-aprendizaje depende de la forma en que el profesor aborda e interpreta los errores cometidos por sus alumnos.

Metodología

Se planteó a 276 alumnos de primer ingreso el ejercicio de simplificación: $\frac{\sqrt[8]{z^4}}{\sqrt[8]{z}}$, en el contexto del examen de ubicación de matemáticas (carreras Empresariales) en la Universidad Panamericana (campus Guadalajara), en julio de 2009. Este ejercicio fue uno de 42 ejercicios que se plantearon.

Los alumnos tenían tiempo ilimitado para responder a los ejercicios sin el uso de calculadora. En este examen de ubicación se miden destrezas, ya que para el desarrollo de competencias posteriores en las carreras Empresariales correspondientes, se requiere de un mínimo de conocimiento matemático (nivel secundaria: resolución de ecuaciones, manejo de expresiones algebraicas, operaciones fundamentales con fracciones y decimales).

Se llevó a cabo una estadística de la incidencia de error, en la cual no se distinguió entre ejercicio no resuelto o equivocado. Al encontrar un porcentaje del 9% de acierto, se ve la necesidad de hacer una investigación cualitativa, en cuanto al análisis de las respuestas equivocadas de los alumnos.

Se reportan los diferentes casos de error (en forma escaneada), para la reconstrucción e interpretación de las posibles causas de error, basados en un análisis detallado de los procedimientos de los alumnos.

Ante la incidencia tan grande de error en este ejercicio, fue importante cuestionarse si los profesores tienen las competencias suficientes para encontrar y analizar la causa de los errores. Se les presenta a 7 profesores (de secundaria y preparatoria) una simplificación equivocada, para que comenten por escrito (comentarios escaneados):

a) ¿Cuál es el error del alumno?
b) ¿Cuál es el origen del error?
c) ¿Cómo le ayudarías al alumno?

$$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = z^3$$

Resultados y Discusión

Debido a las características de la investigación se pensó que era conveniente mostrar los resultados obtenidos junto con la discusión.

I. En las respuestas de los alumnos se encontró que muchos alumnos no contestaron al ejercicio. En las respuestas equivocadas se encontraron procedimientos con origen y causa diferentes, así como procedimientos diferentes con causas semejantes.

1. En las tres respuestas posteriores se intuye, que los alumnos visualizaron en primera instancia la fracción y que cometieron un error de sobregeneralización. "Se puede simplificar todo lo

que es igual en el numerador y denominador”. Falta el conocimiento que el principio fundamental de las fracciones establece que tienen que ser factores y que los signos de operación como los radicales y sus índices no son factores (Memoria declarativa). Los alumnos aplican un esquema de “tachado” (Memoria procedimental, un procedimiento hecho sin reflexión), que puede provenir de los ejemplos muestra antes mencionados. Cabe mencionar, que en este caso no se puede analizar, si el alumno sabe o no, las leyes de exponentes y radicales, ya que no las utiliza (excepto en la simplificación final). Este tipo de error tiene la mayor incidencia.

$$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{z^4}{z} \qquad \frac{\cancel{\sqrt[\cancel{3}]{z^{\cancel{4}_3}}}}{\cancel{\sqrt[3]{z}}} = \boxed{z^3} \qquad \frac{\sqrt[\cancel{3}]{z^4}}{\sqrt[\cancel{3}]{z}}$$

2. En el procedimiento a continuación, es posible que el alumno haya percibido el índice del radical como exponente (Percepción de la información), ya que suma los “exponentes” 3 + 4 = 7. No es consistente, ya que no “suma” el índice del radical con el exponente 1 de la z en el denominador (Memoria declarativa, desconocimiento del exponente implícito). Aunque interpreta la fracción como una división no acaba el ejercicio.

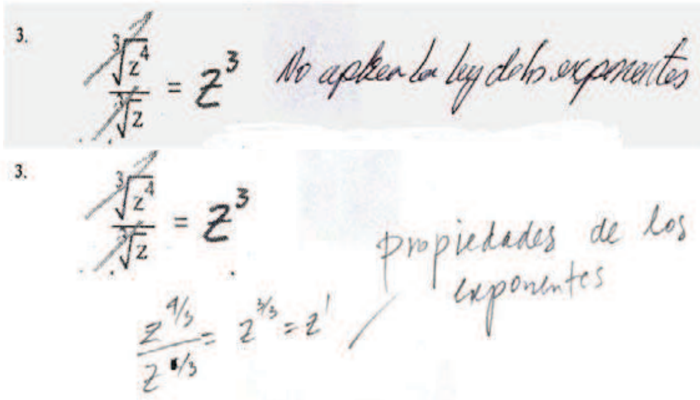
$$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = z^7 \div z^3$$

3. El alumno confunde cuál es el numerador y cuál el denominador, al cambiar la notación del radical por exponentes fraccionarios, para poder aplicar leyes de exponentes. Su procedimiento posterior no lo especifica, o sea, cabe la posibilidad de haber aplicado correctamente la ley de exponentes en la división, ya que $\frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{9}{4}$; o la posibilidad de haber equivocado la ley cambiando el signo del exponente del denominador $\frac{3}{4}(-3) = -\frac{9}{4}$. En el planteamiento del ejercicio no se estuvo consciente de esta posibilidad.

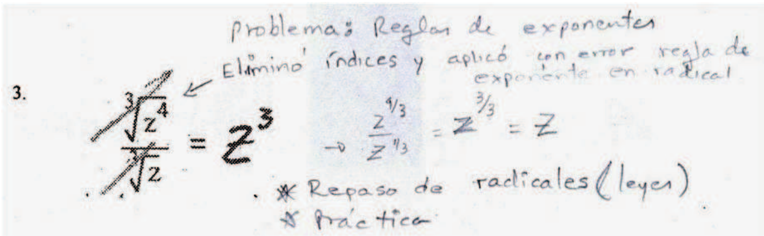
$$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{z^{3/4}}{z^3} = z^{-9/4}$$

II. Las respuestas (escaneadas) de los profesores (que hablan por sí solas) se agruparon, para dar un seguimiento más eficiente, aunque en algunos casos se ven características específicas de un profesor.

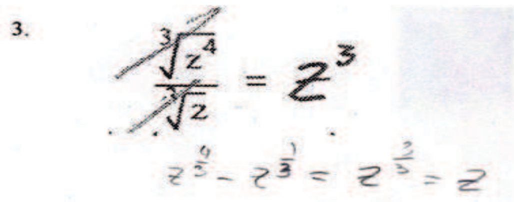
1. Varios profesores manifestaron que la problemática de debía a una aplicación equivocada de las leyes de exponentes. Así mismo consideran, por un lado, que resolver correctamente el ejercicio y hacer un repaso de las leyes de exponentes o radicales sería la forma adecuada de ayudar a los alumnos.



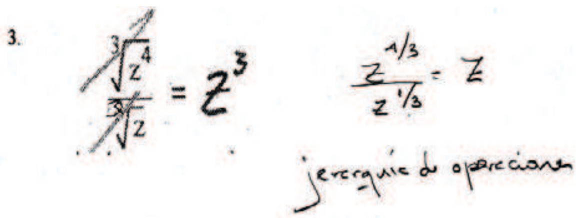
2. Un profesor manifiesta que hubo una "eliminación" de los índices (no hace referencia a los radicales) y que aplicó con error regla de exponentes con radical.



3. Otro profesor dio como única respuesta la resolución del ejercicio con un error en la forma de notación. Se restan los exponentes, pero no las bases con sus respectivos exponentes.

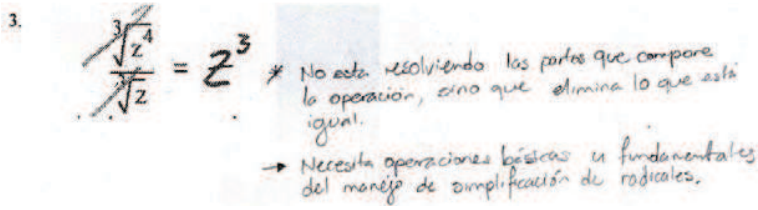


4. El quinto profesor interpretó la problemática en la concepción de jerarquía matemática, analizando a fondo, podría ser una de las causas, ya que si el alumno interpretara que es primero la radicación y posteriormente la división, llegaría eventualmente a la conclusión de que requiere de las leyes de los exponentes o radicales. Esta problemática tendría que ver con la estructura de los términos algebraicos.



5. Es posible que este profesor se acercara a una de las causas, ya que comenta, que el alumno elimina lo que es igual (en el numerador y denominador). Aunque posteriormente considera

que se tienen que revisar las operaciones fundamentales en radicales. No especifica en qué sentido.

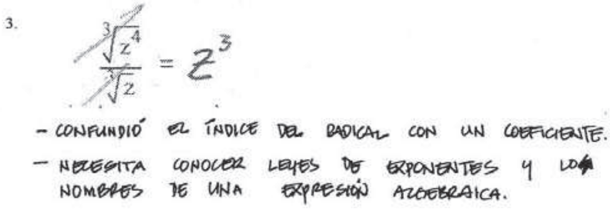


3. $\frac{\sqrt[\cancel{3}]{z^4}}{\sqrt[\cancel{3}]{z}} = z^3$

* No está resolviendo las partes que compone la operación, sino que elimina lo que está igual.

→ Necesita operaciones básicas y fundamentales del manejo de simplificación de radicales.

6. El profesor indica que el error del alumno es una confusión del índice del radical con un coeficiente (puede ser que se refiera a un factor), aunque no hace alusión al radical mismo. Para él también se requiere de un repaso de las leyes de exponentes, y conocimiento de las partes de una expresión algebraica.



3. $\frac{\sqrt[\cancel{3}]{z^4}}{\sqrt[\cancel{3}]{z}} = z^3$

– CONFUNDIÓ EL ÍNDICE DEL RADICAL CON UN COEFICIENTE.

– NECESITA CONOCER LEYES DE EXPONENTES Y LOS NOMBRES DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.

Conclusiones generales

En primer lugar parece importante aclarar, que los errores de los alumnos corresponden a un pensamiento específico, no a desconocimiento total de las matemáticas. Cada alumno (con respuesta equivocada diferente) requiere de una terapia distinta, según la causa del error. Profesores que no pueden distinguir entre las diferentes causas de error, no pueden brindar una ayuda eficiente a los alumnos. En el caso de este ejercicio la problemática del alumno no se debe (al menos no se puede determinar) a una deficiencia en las leyes de exponentes, así que probablemente la resolución correcta y el repaso de leyes de exponentes no hará que el alumno comprenda su error y pueda cambiar concepciones equivocadas. Pocos profesores descubrieron la problemática que subyace a la simplificación equivocada, "elimina los índices", "elimina lo que es igual" y "confunde el índice del radical con un coeficiente". De los dos tipos de resolución, ninguno de los profesores encuestados resolvió el ejercicio de la segunda forma. Esto podría indicar cierta limitación en la diversidad de procedimientos posibles. Ante estos resultados hay mucho por realizar: investigar a fondo las concepciones de los alumnos con respecto a sus resoluciones e investigar en profesores con profundidad el conocimiento de las concepciones de errores de alumnos que tienen.

Referencias bibliográficas

Eccius, C. (2008). Mathematikdidaktische Fehleranalysen zur Schulalgebra. Saarbrücken:VDM Verlag.

Flick, U. (2005). Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung. Reinbek: Rowohlt.

Helmke, A. (2005). Unterrichtsqualität; Erfassen, Bewerten, Verbessern. Berlin: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Malle, G. (1993). Didaktische Problema der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Mayring, P. (2002). Einführung in die Qualitative Forschung. Weinheim: Beltz Verlag.

Nolte, M. (1991). Strukturmomente des Unterrichts und ihre Bedeutung für das Lernen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Nolte, M. (2000); Rechenschwächen und gestörte Sprachrezeption. Beeinträchtigte Lernprozesse im Mathematikunterricht und in der Einzelförderung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Padberg, F. (2005). Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. München: Spektrum, Elsevier GmbH.

Radatz, H. (1985). Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht, Mathematikunterricht 6, 18-24.

Tietze, U., Klika, M. y Wolpers, H. (2000). Mathematikunterricht in der Sekudarstufe II, Band 1. Braunschweig: Vieweg.